15/11/2018

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $k \geq 2$ με πρωταρχική ανάλυση $k = p_1^{a_1} \ldots p_m^{a_m}$ τότε πρέπει p_1 πρώτος με $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ και $a_1 \ldots a_m$ θετικοί ακέραιοι.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $p_1, p_2, \ldots p_r$ διαφορετικοί ανά δύο πρώτοι $a_1, a_r, a_{b_1} \ldots b_r$ ακέραιοι ≥ 0. Τότε από τις προηγούμενες προτάσεις έχουμε $(p_1^{a_1}, p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}) \mid (p_1^{b_1} p_2^{b_2} \ldots p_r^{b_r})$ αν και μόνο αν $a_1 \leq b_1$ και $a_2 \leq b_2$ και $a_3 \leq b_3$ ... και $a_r < b_r$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το $2 \cdot 3^5$ διαιρεί το $2 \cdot 3^6$ ενώ δεν διαιρεί το $2 \cdot 3^4$

Επομένως σαν πόρισμα έχουμε το εξής:

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $p_1, \ldots p_r$ διαφορ. ανά δύο πρώτοι $a_1, a_2 \ldots a_r, b_1, \ldots b_r$ ακέραιοι ≥ 0. Τότε $\text{ΜΚΔ}(p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}, \ldots p_1^{b_1} \ldots p_r^{b_r}) = p_1^{\min(a_1,b_1)} \cdot p_2^{\min(a_2,b_2)} \ldots p_r^{\min(a_r,b_r)}$ όπου $\min(a_1, b_1)$ ο ελάχιστος από τον a_i, b_i.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: / Φυλλάδιο 4 - ΑΣΚΗΣΗ - 1:

Δίδεται ότι $3168 = 2^5 \cdot 9 \cdot 11$ και $15972 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^3$. Να βρεθεί ο ΜΚΔ(3168, 15972)

ΛΥΣΗ: Έχουμε $3168 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 11$

Άρα από πόρισμα

$$\text{ΜΚΔ}(3168, 15972) = \text{ΜΚΔ}(2^5 \cdot 9 \cdot 11, 2^2 \cdot 3 \cdot 11^3) =$$

$$= 2^{\min(5,2)} \cdot 3^{\min(2,1)} \cdot 11^{\min(1,3)} = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A = \text{ΜΚΔ}(2^5 \cdot 3 \cdot 7, 3^2 \cdot 7 \cdot 11) = ;$

ΛΥΣΗ:

$A = \text{ΜΚΔ}(2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11^0, 2^0 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11) \overset{\text{Πρόταση}}{=} 2^{\min(5,0)} \cdot 3^{\min(1,2)} \cdot 7^{\min(1,1)} \cdot 11^{\min(0,1)} = 3 \cdot 7 = 21.$

Ε.Κ.Π. - Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο

Έστω $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Θέτουμε $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq 0, k_1 | m \text{ και } k_2 | m\}$. $S \neq \emptyset$ διότι $|k_1||k_2| \in S$. Επομένως από το θεώρημα, έχει ελάχιστο στοιχείο, το οποίο συμβολίζουμε $\text{ΕΚΠ}(k_1, k_2)$ ή $[k_1, k_2]$ και ονομάζεται ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των k_1, k_2.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $p_1, p_2, \ldots p_r$ πρώτοι, διαφορετικοί ανά δύο, $a_1, \ldots a_r$, $b_1, \ldots b_r$ ακέραιοι ≥ 0. Τότε $\text{ΕΚΠ}(p_1^{a_1}, p_r^{a_r}, p_1^{b_1}, p_r^{b_r}) = (p_1^{\max(a_1,b_1)}, p_2^{\max(a_2,b_2)} \ldots p_r^{\max(a_r,b_r)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Άμεση από την παρατήρηση ότι $p_1^{c_1} \ldots p_r^{c_r} | p_1^{d_1} \ldots p_r^{d_r}$ αν και μόνο αν $c_i \leq d_i \ \forall i$

ΑΣΚΗΣΗ 1 - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4:

Βρείτε το $\text{ΕΚΠ}(2^5 \cdot 9 \cdot 11, 2^2 \cdot 3 \cdot 11^3)$

ΛΥΣΗ: Έχουμε $A = \text{ΕΚΠ}(2^5 \cdot 3^2 \cdot 11, 2^2 \cdot 3 \cdot 11^3) \overset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{=} 2^{\max(5,2)} \cdot 3^{\max(2,1)} \cdot 11^{\max(1,3)} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 11^3$

Πρόταση: Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε $\min(a,b) + \max(a,b) = a+b$

Απόδειξη:

→ Περίπτωση-1: $a \leq b$. Τότε $\min(a,b) = a$, $\max(a,b) = b$ και ισχύει.

→ Περίπτωση-2: $b < a$. Τότε $\min(a,b) = b$, $\max(a,b) = a$ και ισχύει.

Πρόταση: Έστω $k_1, k_2 \geq 1$ ακέραιοι. Τότε $ΜΚΔ(k_1,k_2) \cdot ΕΚΠ(k_1,k_2) = k_1 \cdot k_2$.

Απόδειξη: Έστω $p_1, \dots p_r$ πρώτοι διαφορετικοί ανά δύο με την ιδιότητα κάθε πρώτος διαιρέτης του k_1 ή του k_2 είναι ένα από τα p_i. Τότε υπάρχουν $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r$ ακέραιοι ≥ 0 ώστε $k_1 = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, $k_2 = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$. Από πόρισμα και πρόταση έπεται

$$ΜΚΔ(k_1,k_2)\,ΕΚΠ(k_1,k_2) = p_1^{\min(a_1,b_1)} \cdots p_r^{\min(a_r,b_r)} \cdot p_1^{\max(a_1,b_1)} \cdots p_r^{\max(a_r,b_r)} = p_1^{\min(a_1,b_1)+\max(a_1,b_1)} \cdot p_2^{\min(a_2,b_2)+\max(a_2,b_2)} \cdots p_r^{\min(a_r,b_r)+\max(a_r,b_r)} \overset{\text{Πρόταση}}{=} p_1^{a_1+b_1} \cdot p_2^{a_2+b_2} \cdots p_r^{a_r+b_r} =$$

$$= p_1^{a_1} \cdot p_1^{b_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_2^{b_2} \cdots p_r^{a_r} \cdot p_r^{b_r} = (p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r})(p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}) = k_1 \cdot k_2.$$

Παρατήρηση:

(1) Αν $k \in \mathbb{Z}$, $ΕΚΠ(k,0) = 0$

(2) Αν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ τότε $ΕΚΠ(k_1,k_2) = ΕΚΠ(|k_1|, |k_2|)$

• Φυλλάδιο - 4. •

Άσκηση

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ με $ΜΚΔ(a,b) = 1$. Δείξτε ότι
$ΜΚΔ(a+b,\ a^{2018} b^{2019}) = 1$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $d = ΜΚΔ$. Υποθέτουμε $d > 1$ και θα βρούμε αντίφαση.
Αφού $d \geq 2$ υπάρχει p πρώτος με $p \mid d$. Από τον ορισμό του d,
$d \mid a+b$ και $d \mid a^{2018} \cdot b^{2019}$. Συνεπώς $p \mid a+b$ (1) και p διαιρεί
το $a^{2018} b^{2019}$ (2)
Αφού p πρώτος (2) $\Rightarrow p \mid a$ ή $p \mid b$

Περίπτωση - 1: $p \mid a$. Τότε $\left.\begin{matrix} p \mid a \\ p \mid a+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow p \mid (a+b) - a \Rightarrow p \mid b$

Άρα $p \mid a$ και $p \mid b \Rightarrow p \mid ΜΚΔ(a,b) = 1$ αντίφαση.

Περίπτωση - 2: $p \mid b$. Τότε $\left.\begin{matrix} p \mid b \\ p \mid a+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow p \mid (a+b) - b \Rightarrow p \mid a$

Άρα $p \mid ΜΚΔ(a,b) = 1$, αντίφαση.

Άσκηση 3 - Φυλλάδιο 4.

Έστω $m \in \mathbb{Z}$. Ν.δ.ο. $ΜΚΔ(2m+1,\ 9m+4) = 1$.

ΛΥΣΗ: Αφού $2m+1 \neq 0$ $\forall m \in \mathbb{Z}$ ο ΜΚΔ ορίζεται. Θα χρησιμοποιήσουμε ότι $ΜΚΔ(b,a) = ΜΚΔ(a,b)$, και $ΜΚΔ(a,b) = ΜΚΔ(a,\ b - ka)$ με κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Έχουμε $ΜΚΔ(2m+1,\ 9m+9) = ΜΚΔ(2m+1,\ (9m+4) - 4(2m+1)) =$
$= ΜΚΔ(2m+1,\ m) = ΜΚΔ(m,\ 2m+1) = ΜΚΔ(m,\ (2m+1) - 2m) =$
$= ΜΚΔ(m, 1) = 1$, διότι $\forall k \in \mathbb{Z}$, $ΜΚΔ(k, 1) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 2 - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4.

Έστω $k_1 = 1485$ και $k_2 = 1745$. Να υπολογίσετε ΜΚΔ(k_1, k_2), ΕΚΠ(k_1, k_2) και $x, y \in \mathbb{Z}$ με ΜΚΔ$(k_1, k_2) = xk_1 + yk_2$.

ΛΥΣΗ: Εφαρμόζουμε Ευκλ. Αλγόριθμο

(1) $1745 = 1 \cdot 1485 + 260$

(2) $1485 = 5 \cdot 260 + 185$

(3) $260 = 1 \cdot 185 + 75$

(4) $185 = 2 \cdot 75 + 35$

(5) $75 = 2 \cdot 35 + 5$

(6) $35 = 7 \cdot 5 + 0$

Αφού το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο είναι το 5 έχουμε ΜΚΔ$(k_1, k_2) = 5$.

Από πρόταση ΕΚΠ(k_1, k_2) ΜΚΔ$(k_1, k_2) = k_1 \cdot k_2$

$$\Rightarrow \text{ΕΚΠ}(k_1, k_2) = \frac{k_1 \cdot k_2}{\text{ΜΚΔ}(k_1, k_2)} = \frac{1485 \cdot 1745}{5} = 518265$$

Υπολογ. $x, y \in \mathbb{Z}$ ώστε $5 = x \cdot 1485 + y \cdot 1745$

$$(5) \Rightarrow 5 = 75 - \cancel{23}\, 2 \cdot 35 \overset{(4)}{=} 75 - 2 \cdot (185 - 2 \cdot 75) =$$
$$= 5 \cdot 75 - 2 \cdot 185 \overset{(3)}{=} 5(260 - 1 \cdot 185) - 2 \cdot 185 =$$
$$= 5 \cdot 260 - 7 \cdot 185 \overset{(2)}{=} 5 \cdot 260 - 7(1485 - 5 \cdot 260)$$
$$= 40 \cdot 260 - 7 \cdot 485 \overset{(1)}{=} 40(1745 - 1485) - 7 \cdot 1485$$
$$= 40 \cdot 1745 - 47 \cdot 1485$$

Θέτουμε $x = -47$, $y = 40$.

ΑΣΚΗΣΗ 6 - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4.

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ με $(a,b)=1$. Δείξτε ότι $(a-b, a+b) = 1$ ή 2.
Βρείτε πότε είναι 1 και πότε είναι 2.

ΛΥΣΗ.

Έστω $d = (a-b, a+b)$. Τότε $\begin{cases} d \mid a+b \\ d \mid a-b \end{cases}$ άρα $d \mid (a+b)+(a-b) \Rightarrow d \mid 2a \;(1)$

Υποθ. $d \neq 1$ και θα δείξουμε $d=2$

Έστω p πρώτος με $p \mid d$. Από (1) $p \mid 2a$

$\left.\begin{matrix} d \mid a+b \\ d \mid a-b \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid (a+b)+(a-b) \Rightarrow d \mid 2b \;(2)$

Από $(2) \Rightarrow p \mid 2b$

Περίπτωση-1: $p \neq 2$ Τότε $p \mid 2a \Rightarrow p \mid a$ Άρα $b \mid (a,b) = 1$ αντίφαση
και $p \mid 2b \Rightarrow p \mid b$

Περίπτωση-2: $p=2$. Έστω k η μέγιστη δύναμη του 2 που διαιρεί το d, δηλ. $2^k \mid d$, $2^{k+1} \nmid d$, Αν $k \geq 2$ τότε $2^k \mid 2a \Rightarrow 2^{k-1} \mid a$
και $2^k \mid 2b \Rightarrow 2^{k-1} \mid b \Rightarrow 2^{k-1} \mid (a,b) = 1$, αντίφαση για $k-1 \geq 1$.

Συνεπώς, $k=1$. Άρα Περ.-1 $\oplus$ Περ.-2 $\Rightarrow d=2$.

Πότε $(a+b, a-b) = 1$ και πότε $(a+b, a-b) = 2$;

Περίπτωση-1: a άρτιος, b περιττός. Συνεπώς υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ με $a = 2k_1$, $b = 2k_2+1$. Τότε $(a+b, a-b) = (2k_1+2k_2+1, 2k_1-2k_2-1)$
Αφού $a+b$ περιττός $2 \nmid a+b$ Άρα $(a+b, a-b) = 1$ γιατί ξέραμε ότι είναι 1 ή 2.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ -2: a - περιττός, b - άρτιος. Με την ίδια απόδειξη $(a+b, a-b) = 1$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ -3: a άρτιος, b άρτιος. Τότε $2|a+b$ και $2|a-b \Rightarrow$ $(a+b, a-b) = 2$ (γιατί είναι 1 ή 2)

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ -4: a περιττός, b περιττός. Τότε $2|a+b$ και $2|a-b \Rightarrow$ $(a+b, a-b) = 2$ (γιατί είναι 1 ή 2)

19/11/2018

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Τότε $\text{ΜΚΔ}(ka, kb) = |k| \, \text{ΜΚΔ}(a, b)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θέτουμε $d = \text{ΜΚΔ}(a, b)$, $d_1 = \text{ΜΚΔ}(ka, kb)$

Έχουμε $\left.\begin{matrix} d|a \\ |k|/k \end{matrix}\right\} \Rightarrow d|k| / ak$. Ομοίως $d|k| / kb$

Επομένως, $d|k|$ κοινός θετικός διαιρέτης των $ka, kb \Rightarrow d|k| \leq d_1$ (1)

Έχουμε ότι υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ με $d = xa + yb$.

Συνεπώς (2) $|k|d = x|k|a + y|k|b = \begin{cases} xka + ykb & \text{αν } k > 0 \\ (-x)ka + (-y)kb & \text{αν } k < 0 \end{cases}$

Αφού $d_1 | ka$ και $d_1 | kb \overset{(2)}{\Rightarrow} d_1 / |k| d \Rightarrow d_1 \leq |k| d$ (3)

Από (1) και (3) $\Rightarrow d_1 = |k| d$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν $\text{ΜΚΔ}(a, b) = 2 \Rightarrow \text{ΜΚΔ}(2018a, 2018b) = 2018 \cdot 2 = 4036$.